Satz (von M. Sperl über die Existenz und Eindeutigkeit der Traumfrau)

Für jeden Mann gibt es genau eine Traumfrau.

Beweis: (von A. Niedermeier)

Ex.: Es sei $\mathbb{F}$ die Menge aller Frauen und $m \in \mathbb{M}$ ein Mann. Ferner sei $\varphi_m : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die spezifische Abbildung von m. Wegen $|\mathbb{F}| < \infty$ kann $\mathbb{F}$ o.E. bzgl. der diskreten Topologie $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ betrachtet werden. Damit ist φ_m sicher stetig. Andererseits ist $\mathbb{F}$ als endliche Menge kompakt (bzgl. τ). Daher ist $\varphi_m(\mathbb{F})$ als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt in $\mathbb{R}$, also beschränkt und φ_m nimmt sein Maximum auf $\mathbb{F}$ an.

Eind.: Es seien $f_1, f_2 \in \mathbb{F}, \varphi_m(f_1) = \varphi_m(f_2) = \max\limits_{f \in \mathbb{F}} \varphi_m(f), f_1 \neq f_2$. Die Anwendung impliziert nun Folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: m entscheidet sich für ein $f_i, i \in \{1, 2\}$, o.E. für f_1.

Dann gilt trivialerweise $\varphi_m(f_1) \gneqq \varphi_m(f_2)$ #

2. Fall: m kann sich nicht entscheiden. Dann gilt üblicherweise

$\max\big(\varphi_m(f_1), \varphi_m(f_2)\big) \ll \max\limits_{f \in \mathbb{F}} \varphi_m(f)$ $\big($durch den Einfluß von f_i auf $\varphi_m(f_i)\big)$ # $\square$

Bem. 1: In der Praxis ist zu beachten, daß $|\mathbb{F}|$ sehr groß ist. Des weiteren ist $\varphi_m(f)$ auch für spezielle f oft schwer zu bestimmen.

Folgerung & Definition: Die durch $\Phi : \mathbb{M} \to \mathbb{F}, m \mapsto \arg\max_{f \in \mathbb{F}} \varphi_m(f)$ gegebene Abbildung ist wohldefiniert. Sie heißt Sollabbildung auf $\mathbb{M}$.

Bem. 2: Wegen $|\mathbb{F}| \neq |\mathbb{M}|$ kann es keine Bijektion zwischen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{M}$ geben. Im allgemeinen ist Φ sogar weder injektiv noch surjektiv.

Bem. 3: Analog kann die duale Aussage für $\mathbb{M}, f \in \mathbb{F}$ und ψ_f gezeigt werden. Dies liefert mit der dualen Abbildung Ψ und Bemerkung 2 das Problem, daß $\Phi \circ \Psi \neq id_{\mathbb{F}}, \Psi \circ \Phi \neq id_{\mathbb{M}}$. Zur Lösung (auf maximalen Teilmengen von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{M}$) müsste eine Verallgemeinerung der Funktionen φ_m und ψ_f betrachtet werden, was natürlich bei der Maximierung eine Minderung deren Werte auf $\mathbb{R}$ für i.a. nichtleere Teilmengen von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{M}$ bedeutet.

Bem. 4: Als Verallgemeinerung des Modells kann betrachtet werden, daß $\mathbb{M}$ und $\mathbb{F}$ von der Zeit t abhängig sind. In der Realität wird daher meist (d.h. für feste $t_0 \in \mathbb{R}$) ein Maximum von φ_m (bzw. ψ_f) auf $\mathbb{F}(t_0) \cap \mathbf{G}_m(t_0)$ mit $\mathbf{G}_m(t_0) \subset \mathbb{G}(t_0) := \mathbb{M}(t_0) \cup \mathbb{F}(t_0)$ $\big($bzw. auf $\mathbb{M}(t_0) \cap \mathbf{G}_f(t_0)\big)$ gesucht, sobald $\mathbb{F}(t_0) \cap \mathbf{G}_m(t_0) \neq \emptyset$ $\big($bzw. $\mathbb{M}(t_0) \cap \mathbf{G}_f(t_0) \neq \emptyset\big)$. Dabei gilt trivialerweise stets $m \in \mathbf{G}_m(t_0)$ $\big($bzw. $f \in \mathbf{G}_f(t_0)\big)$, also $\mathbf{G}_m(t_0)$ ist eine Umgebung von m bzgl. $\tau' := \mathcal{P}(\mathbb{G}) \cong \tau \times \mathcal{P}(\mathbb{F})$ $\big($bzw. $\mathbf{G}_f(t_0)$ von $f\big)$.

Bem. 5: (von T. Voigtmann)

Numerisch kann die Entscheidung für ein $f_i \in \mathbb{F}$ mit einem conjugate gradient Verfahren ("gemeinsame Annäherung") zur Minimierung von $-\varphi_m$ erreicht werden. Dabei ist es möglich, daß m in einem lokalen Minimum von $-\varphi_m$ gefangen wird. Ferner ist zu beachten, daß zur Wohldefiniertheit des Gradienten eine Fortsetzung von φ_m auf den Abschluß $\overline{\mathbb{F}}$ gefordert ist. Im allgemeinen gilt hier $\tilde{f} := \arg\max_{f \in \overline{\mathbb{F}}} \varphi_m(f) \notin \mathbb{F}$

Bem. 6: (von T. Voigtmann)

Genauer gilt für zeitabhängige φ_m die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{\varphi}_m(f_i) = \underbrace{P(f_i)}_{\substack{\text{Anfangs-} \\ \text{verteilung}}} + \underbrace{\partial_j \varphi_m(f_k) \varepsilon_{ijk}}_{\substack{\text{Einfluß der anderen} \\ \varphi_m(f_j) \text{ auf } \varphi_m(f_i)}} + \underbrace{D^{ij} \varphi_m(f_j)}_{\text{Dilemmatensor}}$$

A. Niedermeier, 8'1996 & 1'1997

Diesen Text gibt's auch im WWW unter *http://www.fs.tum.de/~niederma/fun/satz.html*